

Yoshimichi Ueda: *A minimal action of the compact quantum group $SU_q(N)$ on a full factor*; J. Math. Soc. Japan.

Definicja 0.1 *Piątkę $W = (A, \delta, R, \{\tau_t\}, h)$, gdzie*

- *A jest algebrą von Neumanna,*
- *$\delta: A \rightarrow A \otimes A$ jest injektywnym, normalnym $*$ -homomorfizmem algebr z jedyneką,*
- *$R: A \rightarrow A$ jest antyautomorfizmem,*
- *$\{\tau_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ jest mocno ciągłą grupą automorfizmów A ,*
- *h jest wierną, normalną, półskończoną, τ -niezmienniczą wagą na A ,*

nazywamy algebrą Woronowicza, jeśli

1. $(\text{id} \otimes \delta) \circ \delta = (\delta \otimes \text{id}) \circ \delta$,
2. $R^2 = \text{id}$, $(R \otimes R) \circ \delta = \sigma \circ \delta \circ R$,
3. $\delta \circ \tau_t = (\tau_t \otimes \tau_t) \circ \delta$, $R \circ \tau_t = \tau_t \circ R$, $\forall t \in \mathbb{R}$,
4. a) dla każdego $\phi \in (A_*)_+$ mamy równość wag (por. [MN])

$$(\phi \otimes h) \circ \delta = \phi(I)h,$$

b) dla dowolnych $a, b \in n_h$ (całkowalnych z kwadratem) i dla dowolnego $\phi \in A_*$ takiego, że $\phi \circ \tau_{-\frac{i}{2}} \in A_*$ mamy

$$(\phi \otimes h)((I \otimes b^*)\delta(a)) = (\phi \circ \tau_{-\frac{i}{2}} \circ R \otimes h)(\delta(b^*)(I \otimes a)),$$

c) grupy σ^h i $\sigma^{h \circ R}$ komutują.

Kwantowe grupy $SU(N)$ Niech $0 < q < 1$ i $N \geq 2$. Kwantowa grupa $SU(N)$ jest to zwarta macierzowa grupa kwantowa (A, u) , gdzie

$$A = C^*\langle u_{kl} : k, l = 1, \dots, N \rangle,$$

$u = (u_{kl}) \in M_N(A)$ ma być unitarna, tzn.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^N u_{kl}^* u_{km} &= \delta_{lm} I, \\ \sum_{k=1}^N u_{mk} u_{lk}^* &= \delta_{ml} I, \end{aligned} \right\} \quad \forall l, m \in \{1, \dots, N\},$$

i (kwantowy) wyznacznik u musi być równy 1, tzn. dla dowolnych wskaźników $l_1, \dots, l_N \in \{1, \dots, N\}$ mamy

$$\sum_{k_1, k_2, \dots, k_N} u_{l_1 k_1} u_{l_2 k_2} \cdots u_{l_N k_N} E_{k_1 k_2 \dots k_N} = E_{l_1 l_2 \dots l_N} I,$$

gdzie

$$E_{i_1 i_2 \dots i_N} = \begin{cases} (-q)^{I(i_1 i_2 \dots i_N)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & N \\ i_1 & i_2 & \dots & i_N \end{pmatrix} \in S_N, \\ 0 & \text{w p. p.} \end{cases}$$

natomiast $I(i_1 i_2 \dots i_N)$ jest liczbą inwersji w ciągu $(i_1 i_2 \dots i_N)$.

Uwaga: aby (A, u) była zwartą macierzową grupą kwantową wystarczy, że E jest prawo i lewo niezdegenerowana.

Dla $N = 2$ mamy

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -q\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix}$$

i relacje przyjmują postać

$$\begin{aligned} \alpha^* \alpha + \gamma^* \gamma &= I, & \alpha \alpha^* + q^2 \gamma \gamma^* &= I \\ \gamma^* \gamma &= \gamma \gamma^*, & \alpha \gamma &= q \gamma \alpha, & \alpha \gamma^* &= q \gamma^* \alpha. \end{aligned}$$

Mamy $\delta: A \rightarrow A \otimes A$

$$\begin{aligned} \delta(\alpha) &= \alpha \otimes \alpha - q \gamma^* \otimes \gamma, \\ \delta(\gamma) &= \gamma \otimes \alpha + \alpha^* \otimes \gamma, \end{aligned}$$

$\kappa: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ (gdzie $\mathcal{A}$ jest algebrą generowaną przez α i γ)

$$\begin{aligned} \kappa(\alpha) &= \alpha^*, & \kappa(\gamma) &= -q\gamma, \\ \kappa(\alpha^*) &= \alpha, & \kappa(\gamma^*) &= -q^{-1}\gamma, \end{aligned}$$

$\epsilon: A \rightarrow \mathbb{C}$

$$\epsilon(\alpha) = 1, \quad \epsilon(\gamma) = 0.$$

Definiujemy wierną reprezentację $\pi: A \rightarrow B(H)$, $H = l^2(\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z})$ z bazą ortonormalną $\{\psi_{n,k}\}_{n \in \mathbb{Z}_+, k \in \mathbb{Z}}$:

$$\begin{aligned} \pi(\alpha)\psi_{n,k} &:= \sqrt{1 - q^{2n}} \psi_{n-1,k}, \\ \pi(\gamma)\psi_{n,k} &:= q^n \psi_{n,k+1}. \end{aligned}$$

można udowodnić, że miara Haara dana jest przez

$$h(a) = (1 - q^2) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} (\psi_{n,0} | \pi(a) \psi_{n,0}).$$

Z definicji $L^\infty(SU_q(2)) = (\pi(A))''$. Indukcyjnie można skonstruować wierne reprezentacje dla $SU_q(N)$ i w ten sposób otrzymamy algebry von Neumanna $L^\infty(SU_q(N)) = (\pi(A))''$.

Na $L^\infty(SU_q(N)) = (\pi(A))''$ mamy strukturę algebry Woronowicza

$$\mathbb{W} = (L^\infty(SU_q(N)), \delta, R, \{\tau_t\}, h).$$

Przykładowo (oznaczając przez u^{lk} macierz u bez wiersza l i kolumny k) mamy

$$\tau_t(u_{kl}) = q^{2i(k-l)t} u_{kl}, \quad R(u_{kl}) = (-1)^{k-l} \det_q(u^{lk}),$$

gdzie dla macierzy $B = (b_{ij})$ mamy $\det_q(B) = \sum_{\sigma \in S_N} (-q)^{I(\sigma)} b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{N\sigma(N)}$.

Do dalszych rozważań będzie potrzebna grupa modularna stanu h :

$$\sigma_t^h(u_{kl}) = q^{2i(k+l-N-1)t} u_{kl}.$$

Mamy algebrę Woronowicza $\mathbb{W} = (A, \delta, R, \{\tau_t\}, h)$. Załóżmy, że $\mathbb{W}$ jest zwarta (tj. h jest stanem). Robimy konstrukcję GNS i dostajemy przestrzeń Hilberta $L^2(A, h) = L^2(A)$ z wektorem cyklicznym i separującym Ω_h .

Definiujemy operator Kaca-Takesakiego $W: L^2(A) \otimes L^2(A) \rightarrow L^2(A) \otimes L^2(A)$

$$W: (a \otimes b)\Omega_h \otimes \Omega_h \longmapsto \delta(b)(a \otimes I)\Omega_h \otimes \Omega_h.$$

Operator W spełnia równanie pentagonalne

$$W_{12}W_{13} = W_{23}W_{13}W_{12}$$

i implementuje komnożenie: $\delta(a) = W(I \otimes a)W^*$.

Można pokazać, że $W \in A \otimes \hat{A}$, gdzie $\hat{A}$ jest algebrą dualną do A .

Mając daną algebrę Woronowicza $\mathbb{W} = (A, \delta, R, \{\tau_t\}, h)$, konstruujemy operator Kaca-Takesakiego i możemy skonstruować dualną algebrę Woronowicza $\widehat{\mathbb{W}} = (\hat{A}, \hat{\delta}, \hat{R}, \{\hat{\tau}_t\}, \hat{h})$:

$$\hat{A} := \{(\phi \otimes \text{id})W^* : \phi \in A_*\},$$

$$\hat{\delta}(\hat{a}) := \widehat{W}(I \otimes \hat{a})\widehat{W}^*, \text{ gdzie } \widehat{W} = \sigma(W^*),$$

$$\hat{R}((\phi \otimes \text{id})W^*) := (\phi \circ R \otimes \text{id})W^*, \quad \phi \in A_*,$$

$$\hat{\tau}_t((\phi \otimes \text{id})W^*) := (\phi \circ \tau_{-t} \otimes \text{id})W^*, \quad \phi \in A_*$$

+ trochę wysiłku, aby skonstruować $\hat{h}$.

Twierdzenie 0.2 $\widehat{\widehat{\mathbb{W}}}$ jest kanonicznie izomorficzna z $\mathbb{W}$.

Kodziaaniem algebry Woronowicza $\mathbb{W} = (A, \delta, R, \{\tau_t\}, h)$ na algebrze von Neumanna M nazywamy injektywny morfizm $\alpha: M \rightarrow M \otimes A$ taki, że

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\alpha} & M \otimes A \\ \alpha \downarrow & & \downarrow id \otimes \delta \\ M \otimes A & \xrightarrow{\alpha \otimes id} & M \otimes A \otimes A \end{array}$$

czyli $(\alpha \otimes id) \circ \alpha = (id \otimes \delta) \circ \alpha$.

Do definicji kodziaania potrzebna jest tylko algebra Hopfa–von Neumanna (A, δ) .

Niech α będzie kodziaaniem algebry Woronowicza $\mathbb{W} = (A, \delta, R, \{\tau_t\}, h)$ na algebrze von Neumanna M . Przedstawimy teraz konstrukcję iloczynu krzyżowego algebry M przez algebrę $\mathbb{W}$.

$$M \rtimes_{\alpha} \mathbb{W} := \left\{ \alpha(M) \cup \mathbb{C}I \otimes \hat{A}' \right\}'' = \left\{ \alpha(M) \cup \mathbb{C}I \otimes \hat{J}\hat{A}\hat{J} \right\}''.$$

W M mamy podalgebrę punktów stałych:

$$M^{\alpha} = \{x \in M : \alpha(x) = x \otimes I\}.$$

Kodzianie $\alpha: M \rightarrow M \otimes A$ jest minimalne jeśli

1. $(M^{\alpha})' \cap M = \mathbb{C}I$,
2. $M \rtimes_{\alpha} \mathbb{W}$ jest faktorem.

Niech $\alpha: M \rightarrow M \otimes A$ będzie kodziaaniem $\mathbb{W}$ na M . Na algebrze $M \otimes B(L^2(A))$ definiujemy kodziaanie $\tilde{\alpha}$ algebry Woronowicza $\mathbb{W}$:

$$\tilde{\alpha} = \text{Ad}_{I \otimes \hat{W}} \circ (id \otimes \sigma) \circ (\alpha \otimes id).$$

$$\begin{array}{ccc} & M \otimes B(L^2(A)) & \\ & \swarrow \alpha \quad \searrow id & \\ M \otimes A \otimes B(L^2(A)) & & \\ \downarrow id & \searrow \sigma & \\ M \otimes B(L^2(A)) \otimes A & & \\ \text{Ad}_{I \otimes \hat{W}} & & (I \otimes \hat{W}) \in M \otimes \hat{A} \otimes A \subset M \otimes B(L^2(A)) \otimes A \\ M \otimes B(L^2(A)) \otimes A & & \end{array}$$

Częścią tezy twierdzenia Takesakiego-Nakagamiego jest następujący fakt: jeśli $W = SU_q(N)$, to

$$\boxed{M \rtimes_{\alpha} W \simeq (M \otimes B(L^2(A)))^{\widetilde{\alpha}}.}$$

Niech (N_1, φ_1) , (N_2, φ_2) i (M, φ) będą parami składającymi się z σ -skończonej algebry von Neumanna i wiernego stanu normalnego na niej. Mówimy, że (M, φ) jest produktem wolnym (N_1, φ_1) i (N_2, φ_2) iff

1. dla $i = 1, 2$ istnieją morfizmy $\lambda_{N_i}: N_i \hookrightarrow M$ takie, że

$$\{\lambda_{N_1}(N_1) \cup \lambda_{N_2}(N_2)\}'' = M,$$

2. mamy $\varphi \circ \lambda_{N_i} = \varphi_i$, $i = 1, 2$,

3. podalgebry $\lambda_{N_1}(N_1)$ i $\lambda_{N_2}(N_2)$ są wolne w M względem φ , tzn. dla dowolnych indeksów $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n$, $i_j \in \{1, 2\}$ i dla dowolnych $x_{i_j} \in N_{i_j}$ mamy

$$\left(\begin{array}{l} \varphi_{i_1}(x_{i_1}) = \varphi_{i_2}(x_{i_2}) = \\ = \dots = \varphi_{i_n}(x_{i_n}) = 0 \end{array} \right) \implies \left(\varphi \left(\lambda_{N_{i_1}}(x_{i_1}) \lambda_{N_{i_2}}(x_{i_2}) \dots \lambda_{N_{i_n}}(x_{i_n}) \right) = 0 \right).$$

W takim wypadku piszemy $(M, \varphi) = (N_1, \varphi_1) * (N_2, \varphi_2)$.

Twierdzenie 0.3 (L. Barnett) *Niech $(M, \varphi) = (N_1, \varphi_1) * (N_2, \varphi_2)$. Załóżmy, że dla $i = 1, 2$ podalgebra $(N_i)_{\varphi_i}$ zawiera dyskretną podgrupę $\mathcal{G}_i$ φ_i -ortogonalnych operatorów unitarnych oraz $|\mathcal{G}_1| \geq 2$, $|\mathcal{G}_2| \geq 3$. Wówczas ustalając $a \in \mathcal{G}_1 \setminus \{I\}$, $b, c \in \mathcal{G}_2 \setminus \{I\}$ mamy*

$$\|x - \varphi(x)I\|_{\varphi} \leq 14 \max \{ \|[x, a]\|_{\varphi}, \|[x, b]\|_{\varphi}, \|[x, c]\|_{\varphi} \}$$

dla wszystkich $x \in M$. Stąd M jest pełnym faktorem oraz

$$\{a, b, c\}' \cap M = \mathbb{C}I.$$

Dygresja: algebra von Neumanna R jest pełna, jeśli $\text{Int } R$ jest domkniętą (w topologii punktowej zbieżności w mocnej topologii) podgrupą w $\text{Aut } R$.

Ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset R$ jest mocno centralny, jeśli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n \omega - \omega x_n\| = 0 \quad \forall \omega \in R_*.$$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest trywialny, jeśli istnieje $(a_n) \in l^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{Z}(R))$ taki, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - a_n\|_\varphi = 0$$

(φ – stan wierny na R).

Twierdzenie 0.4 (A. Connes) *R jest pełna iff każdy ciąg mocno centralny jest trywialny.*

Hiperskończony faktor typu II_1 $\mathcal{R}$ nie jest pełny (okazuje się, że $\text{Int } R$ jest gęsta w $\text{Aut } R$, ale $\text{Out } R$ zawiera dowolną grupę lokalnie zwartą). Faktor typu II_1 $L(F_2)$ jest pełny (Pukanszky).

Ingredenty dalszej zabawy: (A, δ) – algebra Hopfa-von Neumanna oraz $(N_i, \varphi_i, \alpha_i)$, $i = 1, 2$

- N_i – σ -skończona algebra von Neumannna,
- φ_i – stan wierny na N_i ,
- $\alpha_i: N_i \rightarrow N_i \otimes A$ – kodziałanie

takie, że

$$(\varphi_i \otimes \text{id})\alpha_i(x) = \varphi_i(x)I \quad \forall x \in N_i, \quad i = 1, 2.$$

Niech $(M, \varphi) = (N_1, \varphi_1) * (N_2, \varphi_2)$.

Lemat 0.5 $\lambda_{N_1}(N_1) \otimes A$ i $\lambda_{N_2}(N_2) \otimes A$ są wolne w $M \otimes A$ z amalgamacją nad $\mathbb{C}I \otimes A \simeq A$ względem warunkowej wartości oczekiwanej $(\varphi \otimes \text{id}): M \otimes A \rightarrow \mathbb{C}I \otimes A$.

Powyższy lemat potrzebny jest do udowodnienia następującego stwierdzenia:

Stwierdzenie 0.6 *Istnieje dokładnie jeden $*$ -izomorfizm*

$$\Gamma: M \longrightarrow \{(\lambda_{N_1} \otimes \text{id})\alpha_1(N_1), (\lambda_{N_2} \otimes \text{id})\alpha_1(N_2)\}'' \subset M \otimes A$$

taki, że

$$\Gamma \circ \lambda_{N_i} = (\lambda_{N_i} \otimes \text{id}) \circ \alpha_i, \quad i = 1, 2.$$

Stwierdzenie 0.7 $\Gamma: M \rightarrow M \otimes A$ jest kodziałaniem (A, δ) na M , tzn.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Gamma} & M \otimes A \\ \Gamma \downarrow & & \downarrow id \otimes \delta \\ M \otimes A & \xrightarrow{\Gamma \otimes id} & M \otimes A \otimes A \end{array}$$

Dowód: Wystarczy to sprawdzić na generatorach algebry M (czyli na obrazach λ_{N_1} i λ_{N_2}). Niech $x \in N_i$.

$$\begin{aligned} (\Gamma \otimes id)\Gamma(\lambda_{N_i}(x)) &\stackrel{(1)}{=} (\Gamma \otimes id)(\lambda_{N_i} \otimes id)\alpha_i(x) \\ &\stackrel{(2)}{=} (\lambda_{N_i} \otimes id \otimes id)(\alpha_i \otimes id)\alpha_i(x) \\ &\stackrel{(3)}{=} (\lambda_{N_i} \otimes id \otimes id)(id \otimes \delta)\alpha_i(x) \\ &\stackrel{(4)}{=} (id \otimes \delta)(\lambda_{N_i} \otimes id)\alpha_i(x) \\ &\stackrel{(5)}{=} (id \otimes \delta)\Gamma(\lambda_{N_i}(x)). \end{aligned}$$

W równościach (1), (2) i (5) skorzystaliśmy z równości z definicji Γ , mianowicie

$$\Gamma \circ \lambda_{N_i} = (\lambda_{N_i} \otimes id) \circ \alpha_i,$$

w równości (3) skorzystaliśmy z faktu, że α_i jest kodziałaniem czyli

$$(\alpha_i \otimes id) \circ \alpha_i = (id \otimes \delta) \circ \alpha_i,$$

a w równości (4) wykorzystaliśmy równość

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} N_i \\ \swarrow \alpha_i \\ N_i \otimes A \\ \swarrow id \quad \searrow \delta \\ N_i \otimes A \otimes A \\ \downarrow \lambda_{N_i} \quad \downarrow id \quad \downarrow id \\ M \otimes A \otimes A \end{array} & = & \begin{array}{c} N_i \\ \swarrow \alpha_i \\ N_i \otimes A \\ \downarrow \lambda_{N_i} \quad \downarrow id \\ M \otimes A \\ \swarrow id \quad \searrow \delta \\ M \otimes A \otimes A \end{array} \end{array}$$

Definicja 0.8 Kodziałanie Γ nazywamy produktem wolnym kodziałan α_1 i α_2 . Piszemy $\Gamma = \alpha_1 * \alpha_2$.

Precyzujemy sytuację: Niech $\mathcal{R}$ będzie hiperskończonym faktorem typu II_1 z unormowanym śladem τ . Niech $A = L^\infty(SU_q(N))$.

$$(N_1, \varphi_1) := (\mathcal{R} \otimes A, \tau \otimes h),$$

$$(N_2, \varphi_2) := (\mathcal{R}, \tau),$$

$$\alpha_1 := (\text{id} \otimes \delta),$$

$$\alpha_2(x) := x \otimes I, \quad x \in \mathcal{R}.$$

Sprawdzamy czy $(\varphi_i \otimes \text{id})\alpha_i(x) = \varphi(x)I$ dla $x \in N_i, i = 1, 2$: Niech $x \otimes a \in \mathcal{R} \otimes A$.

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \otimes \text{id})\alpha_1(x \otimes a) &= (\tau \otimes h \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \delta)(x \otimes a) \\ &= \tau(x)(h \otimes \text{id})\delta(a) = \tau(x)h(a)I \\ &= (\tau \otimes h)(x \otimes a)I = \varphi_1(x \otimes a)I. \end{aligned}$$

Niech $x \in \mathcal{R}$.

$$(\varphi_2 \otimes \text{id})\alpha_2(x) = (\tau \otimes \text{id})(x \otimes I) = \tau(x)I = \varphi_2(x)I.$$

Niech $\Gamma = \alpha_1 * \alpha_2: M \rightarrow M \otimes A$.

Twierdzenie 0.9 $(M^\Gamma)' \cap M = \mathbb{C}I$

Dowód: Wiemy, że M^Γ zawiera $\mathcal{R} \otimes \mathbb{C}I$ oraz $\mathcal{R}$ (obie siedzą w $M = (\mathcal{R} \otimes A) * \mathcal{R}$, bo na obrazach $\mathcal{R} \otimes A$ i $\mathcal{R}$ Γ działa tak samo jak α_1 i α_2). Zarówno $\mathcal{R} \otimes \mathbb{C}I$ jak i $\mathcal{R}$ mają wystarczająco duże grupy ortogonalnych operatorów unitarnych

Przedstawiamy $\mathcal{R}$ jako $L(S_\infty)$. Definiujemy $\gamma_n \in U(\mathcal{R})$

$$\gamma_n \delta_m := \begin{cases} \delta_m & m \neq e, m \neq n, \\ \delta_n & m = e, \\ \delta_e & m = n. \end{cases}$$

Wtedy $(\gamma_n | \gamma_k)_\tau = \tau(\gamma_n^* \gamma_k) = (\gamma_n \delta_e | \gamma_k \delta_e) = \delta_{nk}$. Weźmy $\mathcal{G}_1 = \langle \gamma_n \otimes I : n \in \mathbb{N} \rangle$, $\mathcal{G}_2 = \langle \gamma_n : n \in \mathbb{N} \rangle$.

Poza tym $\mathcal{R} \otimes \mathbb{C}I$ i $\mathcal{R}$ są oczywiście zawarte w centralizatorach stanów $\tau \otimes h$ i τ . Wybieramy $I \neq a \in \mathcal{G}_1$, $b, c \in \mathcal{G}_2 \setminus \{I\}$. Z twierdzenia Barnetta mamy

$$(M^\Gamma)' \cap M \subset ((\mathcal{R} \otimes \mathbb{C}I) * \mathcal{R})' \cap M \subset \{a, b, c\}' \cap M = \mathbb{C}I.$$

Wniosek 0.10 M^Γ jest faktorem.

Dowód: $\mathcal{Z}(M^\Gamma) = (M^\Gamma)' \cap M^\Gamma \subset (M^\Gamma)' \cap M = \mathbb{C}I$.

Twierdzenie 0.11 $M \rtimes_\Gamma SU_q(N)$ jest faktorem.

Dowód: Zdefiniujmy kodziałanie $\bar{\Gamma}$ algebry Woronowicza $\mathbb{W} = SU_q(N)$ na $M \otimes B(L^2(A))$:

$$\bar{\Gamma} := (\text{id} \otimes \sigma) \circ (\Gamma \otimes \text{id}).$$

Na rysunku wygląda to tak:

$$\begin{array}{ccc} & M \otimes B(L^2(A)) & \\ & \swarrow \Gamma \quad \searrow \text{id} & \\ M \otimes A \otimes B(L^2(A)) & & \\ \downarrow \text{id} & \searrow \sigma & \\ M \otimes B(L^2(A)) \otimes A & & \end{array}$$

Mamy też kodziałanie Takesakiego-Nakagamiiego $\tilde{\Gamma} = \text{Ad}_{I_M \otimes \hat{W}} \circ \bar{\Gamma}$, które wygląda tak:

$$\begin{array}{ccc} & M \otimes B(L^2(A)) & \\ & \swarrow \Gamma \quad \searrow \text{id} & \\ M \otimes A \otimes B(L^2(A)) & & \\ \downarrow \text{id} & \searrow \sigma & \\ M \otimes B(L^2(A)) \otimes A & & \\ \text{Ad}_{I_M \otimes \hat{W}} & & (I \otimes \hat{W}) \in M \otimes \hat{A} \otimes A \subset M \otimes B(L^2(A)) \otimes A \\ M \otimes B(L^2(A)) \otimes A & & \end{array}$$

Mamy następujący ciąg izomorfizmów

$$M \rtimes_\Gamma SU_q(N) \stackrel{(1)}{\cong} (M \otimes B(L^2(A)))^{\tilde{\Gamma}} \stackrel{(2)}{\cong} (M \otimes B(L^2(A)))^{\bar{\Gamma}} \stackrel{(3)}{=} M^\Gamma \otimes B(L^2(A)),$$

gdzie izomorfizm (1) jest częścią tezy twierdzenia Takesakiego-Nakagamiiego, a równość (3) jest oczywista. Postaramy się uzasadnić izomorfizm (2). Zauważmy, że ponieważ algebra $M^\Gamma \otimes B(L^2(A))$ jest faktorem, to uzasadnienie (2) zakończy dowód.

Niech $u = I_{\mathcal{R}} \otimes W^* \in (\mathcal{R} \otimes A) \otimes \widehat{A} \subset M \otimes B(L^2(A))$.

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma}(u) &= (\text{id} \otimes \sigma)(\Gamma \otimes \text{id})(u) \\
&= (\text{id} \otimes \sigma)(\Gamma \otimes \text{id})(I_{\mathcal{R}} \otimes W^*) \\
&= (\text{id} \otimes \sigma)(\text{id} \otimes \delta \otimes \text{id})(I_{\mathcal{R}} \otimes W^*) \\
&= I_{\mathcal{R}} \otimes (\text{id} \otimes \sigma)(\delta \otimes \text{id})W^* \\
&= I_{\mathcal{R}} \otimes (\text{id} \otimes \sigma)(W_{12}W_{23}^*W_{12}^*) \\
&\stackrel{(*)}{=} I_{\mathcal{R}} \otimes (\text{id} \otimes \sigma)(W_{13}^*W_{23}^*) \\
&= I_{\mathcal{R}} \otimes (\text{id} \otimes \sigma)W_{13}^*(\text{id} \otimes \sigma)W_{23}^* \\
&= I_{\mathcal{R}} \otimes (W^* \otimes I_A)(I_M \otimes \widehat{W}) \\
&= (u \otimes I_A)(I_M \otimes \widehat{W}),
\end{aligned}$$

gdzie w równości oznaczonej $(*)$ skorzystaliśmy z równania pentagonalnego:

$$\begin{aligned}
W_{12}W_{23} &= W_{23}W_{13}W_{12}, \\
W_{23}^*W_{12}^* &= W_{12}^*W_{13}^*W_{23}^*, \\
W_{12}W_{23}^*W_{12}^* &= W_{13}^*W_{23}^*.
\end{aligned}$$

Tym samym wykazaliśmy, że

$$(I_M \otimes \widehat{W}) = (u^* \otimes I_A)\overline{\Gamma}(u).$$

Teraz

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}(M \otimes B(L^2(A))) &= (I_M \otimes \widehat{W})\overline{\Gamma}(M \otimes B(L^2(A)))(I_M \otimes \widehat{W})^* \\
&\quad \parallel \\
&= (u^* \otimes I_A)\overline{\Gamma}(u)\overline{\Gamma}(M \otimes B(L^2(A)))\overline{\Gamma}(u^*)(u \otimes I_A) \\
&\quad \parallel \\
&= (u^* \otimes I_A)\overline{\Gamma}(u(M \otimes B(L^2(A))))u^*(u \otimes I_A) \\
&\quad \parallel \\
&= (u^* \otimes I_A)\overline{\Gamma}(M \otimes B(L^2(A)))(u \otimes I_A),
\end{aligned}$$

a to załatwia izomorfizm podalgebr punktów stałych.

Rozpoznanie typu M : Pamiętajmy, że $(M, \varphi) = (\mathcal{R} \otimes A, \tau \otimes h) * (\mathcal{R}, \tau)$. W dowodzie Twierdzenia 0.9 wspomnieliśmy, że podalgebry $(\mathcal{R} \otimes \mathbb{C}I)$ i $\mathcal{R}$ są w centralizatorze φ :

$$(\mathcal{R} \otimes \mathbb{C}I), \mathcal{R} \subset M_{\varphi}.$$

Stąd M jest pełnym faktorem oraz (tak jak w Twierdzeniu 0.9)

$$(M_{\varphi})' \cap M_{\varphi} \subset (M_{\varphi})' \cap M = \mathbb{C}I$$

czyli M_{φ} jest faktorem. W takim wypadku M nie może być typu III_0

Jeśli M_φ jest faktorem, to $S(M) = \text{Sp } \Delta_\varphi$, ale dla typu III_0 mamy $S(M) = \{0, 1\}$, a to oznaczałoby, że Δ_φ jest ograniczony, ale tak nie jest, bo M jest typu III. Jeśli M byłby faktorem pólskończonym, to grupa modularna φ byłaby złożona z automorfizmów wewnętrznych, ale operatory unitarne implementujące σ_t^φ zawsze są w $\mathcal{Z}(M_\varphi)$ stąd φ byłby śladem, a nie jest.

Poszukamy zbioru

$$T(M) = \{t \in \mathbb{R} : \sigma_t^\varphi = \text{id}\}$$

(można brać $\sigma_t^\varphi = \text{id}$ zamiast $\sigma_t^\varphi \in \text{Int } M$, bo M_φ jest faktorem). Ponieważ $\varphi = (\tau \otimes h) * \tau$ mamy

$$\sigma_t^\varphi = (\sigma_t^\tau \otimes \sigma_t^h) * \sigma_t^\tau = (\text{id} \otimes \sigma_t^h) * \text{id}.$$

Pamiętamy, że dla $SU_q(N)$ mamy

$$\sigma_t^h(u_{kl}) = q^{2i(k+l-N-1)t} u_{kl},$$

gdzie $u = (u_{kl})$ jest reprezentacją podstawową $SU_q(N)$. Zbiór $\{u_{kl} : k, l = 1, \dots, N\}$ generuje $L^\infty(SU_q(N))$ więc

$$(\sigma_t^\varphi = \text{id}) \iff (\sigma_t^h = \text{id}) \iff (q^{2it} = 1)$$

czyli

$$T(M) = \frac{2\pi}{\log q^2} \mathbb{Z}$$

i M jest faktorem typu III_{q^2} .

Podsumowanie: Istnieje minimalne kodziahanie grupy $SU_q(N)$ na pełnym faktorze typu III_{q^2} .

References

- [B] L. Barnett: *Free product von Neumann algebras of type III*; Proc. AMS Vol. 123, No. 2 (1995), pp. 543-553.
- [C1] A. Connes: *The Tomita-Takesaki theory and classification of type III factors*; Proc. Int. School Phys. "Enrico Fermi", *C**-algebras and their applications to statistical mechanics and quantum field theory.
- [C2] A. Connes: *Classification of injective factors*; Ann. Math. 104 (1976), pp. 73-115.
- [MN] T. Masuda, Y. Nakagami: *A von Neumann algebra framework for the duality of quantum groups*; Publ. RIMS Kyoto 30 (1994), pp. 799-850.

- [N] Y. Nakagami: *Takesaki duality for the crossed product by quantum groups*; Quantum and non-commutative analysis. Kulwer Academic Publishers 1993, pp. 799-850.
- [U] Y. Ueda: *A minimal action of the compact quantum group $SU_q(N)$ on a full factor*; J. Math Soc. Japan.
- [VDN] D. V. Voiculescu, K. J. Dykema, A. Nica: *Free random variables*; CRM Monographs Series AMS 1992.
- [SLW1] S. L. Woronowicz: *Twisted $SU(2)$ group. An example of non-commutative differential calculus*; Publ. RIMS Kyoto 23 (1987) pp. 117-181.
- [SLW2] S. L. Woronowicz: *Compact matrix pseudogroups*; Comm. Math. Phys. 111 (1987), pp. 613-665.
- [SLW3] S. L. Woronowicz: *Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted $SU(N)$ groups*; Invent. Math. 93 (1988), pp. 35-76.